progetto

ArAl

Giancarlo Navarra · Maria Grazia Della Picca · Anna Traverso

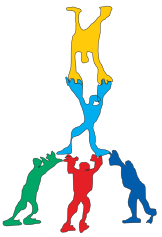
Matematica e pensiero relazionale:
un percorso educativo per la scuola primaria

CLASSE QUARTA E CLASSE QUINTA
con espansioni verso la scuola secondaria



Sintab Edizioni

PERCORSI NELL'EARLY ALGEBRA



Proprietà letteraria riservata
© ® 2025 Sintab srl - Sulmona
Finito di stampare nel mese di ottobre 2025
Printed in Italy

In copertina: Immagine elaborata da Gianpaolo Tronca e Emiliano Amicosante con Artlis AI e ChatGPT
Impaginazione: Emiliano Amicosante

Tutti i diritti riservati. Nessuna parte del materiale protetto da questo copyright potrà essere riprodotta in alcuna forma senza l'autorizzazione scritta della Sintab Edizioni.
Fotocopie per uso personale del lettore possono essere effettuate nei limiti del 15% di ciascun volume fascicolo di periodico dietro pagamento alla SIAE del compenso previsto dall'art. 68, comna 4, della legge 22 aprile 1941 n. 633.

Le riproduzioni ad uso differente da quello personale potranno avvenire, per un numero di pagine non superiore al 15% del presente volume/fascicolo, solo a seguito di specifica autorizzazione.

Matematica e pensiero relazionale:
un percorso educativo per la scuola primaria

CLASSE QUARTA E CLASSE QUINTA
con espansioni verso la scuola secondaria

Sintab Edizioni

INDICE

PARTE I: PRIMA DI RICOMINCIARE

07 IL PERCORSO
- I.1 Continua il percorso nella prospettiva dell'early algebra: una didattica per problemi
- I.2 Nodi fondativi e temi chiave
- I.3 I Capitoli

17 FRAZIONI, NUMERI DECIMALI, NUMERI RAZIONALI NEL PROGETTO ArAl
- I.4 Rappresentazioni canoniche e non canoniche in $\mathbb{N}$ e in $\mathbb{Q}$

20 IL LINGUAGGIO
- I.5 Argomentare
- I.6 Definire
- I.7 Generalizzare
- I.8 Parafrasare
- I.9 'Dimostrare' (alla fine della scuola primaria)
- I.10 Costruire il testo di un problema
- I.11 La discussione collettiva come forma di insegnamento/apprendimento: atteggiamenti e convinzioni degli insegnanti

30 I MATERIALI, LA MANIPOLAZIONE
- I.12 Il passaggio dalla terza alla quarta
- I.13 I materiali

35 PER CONCLUDERE
- I.14 Suggerimenti di metodo

PARTE II: IL PERCORSO

39 1 LA CONQUISTA DELLA PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA
Nascita e consolidamento di una proprietà
- 1.1 Principali costrutti teorici sviluppati
- 1.2 La proprietà
- 1.3 Il percorso attraverso l'esplorazione di situazioni problematiche
- 1.4 Espansione. Verso la scuola secondaria

81 2 IL NUMERO SCONOSCIUTO, IL NUMERO VARIABILE
Si approfondisce l'uso della lettera, verso la generalizzazione
- 2.1 Principali costrutti teorici sviluppati
- 2.2 I temi e le competenze
- 2.3 Il percorso attraverso l'esplorazione di situazioni problematiche
- 2.4 Espansione. Verso la scuola secondaria

121 3 DALLA BILANCIA A PIATTI ALL'EQUAZIONE
Un approccio sperimentale al formalismo algebrico
3.1 Principali costrutti teorici sviluppati
3.2 L'approccio alle equazioni tramite la bilancia a piatti e Scatole & Biglie
3.3 Un approccio alle funzioni lineari
3.4 Il percorso attraverso l'esplorazione di situazioni problematiche
3.5 Espansione. Verso la scuola secondaria

199 4 CERCARE, INTERPRETARE, RAPPRESENTARE REGOLARITÀ
Si esplorano le successioni
4.1 Principali costrutti teorici sviluppati
4.2 Le divisioni in ℕ hanno sempre un resto
4.3 Si cerca un elemento in relazione alla sua posizione nella successione: dall'approccio tramite la divisione alla rappresentazione euclidea della divisione
4.4 Le successioni come funzioni
4.5 Il percorso attraverso l'esplorazione di situazioni problematiche
4.6 Espansione. Verso la scuola secondaria

253 5 CONFRONTARE SENZA CALCOLARE
Si riflette sul significato delle scritture matematiche
5.1 Principali costrutti teorici sviluppati
5.2 Alcune note introduttive
5.3 Il percorso attraverso l'esplorazione di situazioni problematiche
5.4 Espansione. Verso la scuola secondaria

287 GLOSSARIO ESSENZIALE

293 BIBLIOGRAFIA

Ogni volta che incontri questa icona all'interno del testo significa che sono disponibili contenuti multimediali. Torna qui, inquadra il QR Code e consulta i contenuti multimediali.

PARTE I: PRIMA DI RICOMINCIARE

***Nota per il lettore**. Per rendere più agevole la lettura i testi e gli ambienti che vengono ripetutamente citati sono indicati con delle sigle:*

MPR-1	G. Navarra, M.G. Della Picca & A. Traverso (2023). *Matematica e pensiero relazionale: un percorso educativo per la scuola primaria. Classe prima*. Sulmona (AQ): Sintab Edizioni.
MPR-2/3	G. Navarra, M.G. Della Picca & A. Traverso (2024). *Matematica e pensiero relazionale: un percorso educativo per la scuola primaria. Classe seconda e classe terza.* Sulmona (AQ): Sintab Edizioni.
MPR-4/5	G. Navarra, M.G. Della Picca & A. Traverso (2025). *Matematica e pensiero relazionale: un percorso educativo per la scuola primaria. Classe quarta e classe quinta. Con espansioni verso la scuola secondaria.* Sulmona (AQ): Sintab Edizioni.
NAV	G. Navarra (2022). *Aritmetica e Algebra. Un percorso intrecciato dai 5 ai 14 anni. Ruoli dell'insegnante nella costruzione di una classe pensante.* Milano: Utet Università.
C&B	Cannucce & Bicchieri
MD	Macchina Distributiva
MSN	Macchina SputaNumeri
S&B	Scatole & Biglie

IL PERCORSO

I.1 Continua il percorso nella prospettiva dell'early algebra: una didattica per problemi

In MPR-1 e MPR-2/3 si è spiegato come, dagli anni '80, la ricerca abbia dimostrato che molte delle difficoltà che gli studenti incontrano di fronte allo studio dell'algebra abbiano origine da un insegnamento dell'aritmetica nella scuola primaria attento soprattutto alle *procedure* da eseguire e *poco attento all'interpretazione e alla riflessione sui significati delle scritture in linguaggio matematico*.

Anche questo volume, come i due precedenti, ha l'obiettivo di guidare i docenti verso un insegnamento profondamente diverso, in cui si sostituisca l'impostazione di tipo *procedurale,* che abitua l'alunno, di fronte a un problema, a cercare le *operazioni sui dati per ottenere il risultato*, con una di tipo *relazionale e linguistico*, che lo guidi a costruire una sua *rappresentazione in linguaggio matematico* (inizialmente si tratterà di

un'*equazione per gioco*) in cui inserire gli enti conosciuti, quelli sconosciuti e le relazioni che li collegano.

Continueremo a vedere come, per avviare tale nuova impostazione, sia necessario che l'insegnante maturi un mutamento della metodologia del lavoro in classe, promuovendo la *verbalizzazione e l'argomentazione* e quindi, in generale, le competenze linguistiche degli alunni, compito questo, per altro, *trasversale a tutti i docenti*. Scriviamo spesso, in questo senso, che:

il docente di matematica è anche un docente di linguaggio matematico.

Tale compito, da questo punto di vista, è reso più complesso per il fatto che l'apprendimento dei concetti matematici, per essere efficace, deve poggiare su *una pluralità di sistemi semiotici* in cui si intrecciano molti linguaggi: il linguaggio naturale e quello matematico, ma anche quello grafico, iconico, sagittale, tabulare.

Promuovere l'uso del linguaggio naturale come mediatore nella conquista del linguaggio algebrico comporta la scelta di adottare come pratica abituale una *didattica per problemi* che fondi la costruzione delle competenze sull'*esplorazione di situazioni problematiche* significative e sull'*argomentazione* e favorisca il pensiero *metacognitivo* e la funzione *metalinguistica*. Come il lettore ormai sa, tutti i capitoli di MPR-1 e MPR-2/3 seguono questa impostazione, e propongono una successione di blocchi omogenei di situazioni problematiche suddivise in due parti:

(1) un testo, corredato o meno da immagini o video, talvolta proposto sotto forma di 'SFIDA!', accompagnato da una o più consegne;
(2) dei suggerimenti per l'insegnante che lo aiutino a condurre l'attività in modo coerente rispetto all'impostazione di cui si è parlato sopra.

Soffermiamoci brevemente quindi su tre aspetti, per altro già affrontati nei due volumi precedenti:

C. cosa si intende con 'didattica per problemi',
D. come sono impostati i testi delle situazioni problematiche e le relative consegne,
E. in base a quali criteri sono organizzati i suggerimenti che le corredano.

A. Una didattica per problemi

Impostata in chiave socio-costruttivista nella prospettiva dell'early algebra, la didattica per problemi fonda la costruzione delle competenze sull'*esplorazione* di situazioni problematiche significative e sull'*argomentazione* come opportunità per avviare e far maturare tale costruzione. Per attuarla l'insegnante deve fare i conti anche con sé stesso: con conoscenze, convinzioni, abitudini, stereotipi che potrebbero averlo portato alla classica concezione del problema-esercizio, avente lo scopo 'locale' di consolidare e verificare abilità e conoscenze legate a un certo argomento appena trattato.

Una didattica per problemi si sviluppa sia grazie a situazioni problematiche innovative, originali, stimolanti, anche aperte verso una pluralità di conclusioni, sia

attraverso una rilettura mirata dei problemi standard (tipici dei libri di testo) visti secondo prospettive diverse, che esaltino la scelta delle competenze necessarie alla loro soluzione e la capacità di argomentare le proprie conclusioni. Il Progetto ArAl è impegnato in entrambe le direzioni.

B. I testi delle situazioni problematiche e le relative consegne

Le conseguenze di queste scelte sono evidenti nella struttura delle situazioni problematiche proposte nei capitoli e nell'organizzazione delle consegne, impostate costantemente *nella prospettiva relazionale del rappresentare* ('Rappresenta per Brioshi' oppure 'Rappresenta in linguaggio matematico'). Come il lettore avrà visto nei volumi precedenti, non si pongono mai richieste *procedurali* del tipo 'Quanti sono...', 'Calcola', 'Trova'.

La struttura dei problemi è molto varia: si descrivono situazioni, si simulano episodi di classe contenenti il confronto tra ipotesi differenti, si invita alla lettura del testo così com'è scritto oppure si dà una traccia (con un linguaggio da adulti) che l'insegnante proporrà con le sue parole agli alunni, si invita all'uso di materiali concreti di supporto o all'interpretazione di immagini. Sappiamo bene che aspetti strutturali così inconsueti possono disorientare. Il cambio di prospettiva che proponiamo non è facile, e l'insegnante che lo sta maturando certamente se ne è reso conto; riteniamo che la grande varietà di ambienti e di spunti possa favorire la comprensione del cambiamento e un cambio di mentalità verso il quale, con l'esperienza, guiderà anche i suoi alunni.

C. I suggerimenti per gli insegnanti

I suggerimenti relativi alla gestione delle situazioni problematiche riflettono esiti di sperimentazioni ArAl proposte in classe, commenti a diari redatti dagli insegnanti all'interno della Metodologia delle Trascrizioni Pluricommentate[1], atteggiamenti frequenti riscontrabili negli alunni, possibili o probabili difficoltà e strategie per superarli. Spesso contengono riferimenti a costrutti teorici da condividere con la classe per far maturare conoscenze e competenze in un contesto che leghi le scelte operate dagli alunni a ragioni che possano dare a esse spessore concettuale. Per esempio, quando si opera una trasformazione in una scrittura in linguaggio matematico, è opportuno esplicitare se si effettua una sostituzione di rappresentazioni (da canonica a non canonica o viceversa) o se si applicano una proprietà o un principio. Oppure, quando si supporta l'esplorazione di una certa situazione problematica che presenta più soluzioni possibili, è produttivo realiz-

1 › La Metodologia delle Trascrizioni Pluricommentate è uno strumento elaborato all'interno del Progetto ArAl, concepito per portare l'insegnante a sviluppare l'analisi fine di processi di classe (propri e altrui) con lenti teoriche che lo aiutino a interpretarli. Chi redige il diario audio o videoregistra una lezione e la trascrive fedelmente, senza omettere o condensare alcuna parte, poi commenta la registrazione a tavolino e la invia all'e-tutor che commenta a sua volta il diario, spesso invitando altri ricercatori o insegnanti esperti a fare altrettanto. A questo punto il diario viene ritrasmesso all'autore e ad altri docenti appartenenti a istituti che collaborano con il progetto ArAl. I commenti di un diario, nel loro insieme, accostano aspetti di contenuto, osservazioni riguardanti la comunicazione e il linguaggio utilizzati nel corso dell'attività, questioni relative alla partecipazione degli allievi e al contratto didattico attuato.

zarla attraverso una ricerca ordinata, utilizzando una rappresentazione tabulare.

Concludiamo con un invito già formulato in altre occasioni: l'insegnante non ritenga che i testi delle situazioni problematiche, le consegne o le ipotetiche argomentazioni si riferiscano a un linguaggio di registro troppo *alto*. Può naturalmente adattarlo al livello delle competenze della classe, ma non lo abbassi eccessivamente: lo adegui pure, ma rimanga comunque *ragionevolmente esigente*.

I.2 Nodi fondativi e temi chiave

Per gli approfondimenti e gli ampliamenti si invita ad appoggiarsi a NAV. Qui ci limitiamo a ricordare:

1) tre nodi fondativi per l'avvio al pensiero pre-algebrico (sono trattati in modo più esteso in MPR-1, p.11):
   - Il significato relazionale del segno uguale: non più operatore direzionale che 'prepara al risultato', ma *indicatore di uguaglianza (simmetrica)* fra due rappresentazioni formalmente differenti dello stesso numero.
   - Le diverse rappresentazioni di un numero: un numero è esprimibile in linguaggio matematico in infiniti modi, attraverso la *rappresentazione canonic*a (ad es: 5, rappresentazione del numero 'cinque' come *prodotto*) e le sue *rappresentazioni non canoniche* (ad es: 4+1, rappresentazione del numero 'cinque' come *processo*).
   - L'approccio al numero sconosciuto: l'attenzione si sposta dall'operazione fra due numeri conosciuti (per es. 5×4) alla rappresentazione della *relazione* (in questo caso moltiplicativa) *fra due numeri, indipendentemente dal fatto che essi siano conosciuti o no* (per es. 5×a).

2) tre temi chiave:
   - Verbalizzare, argomentare: nell'ambito della ricerca che si occupa di educazione matematica è ormai accertato come la capacità di *verbalizzare*, cioè di tradurre in parole intuizioni, ipotesi, punti di vista e di *argomentare,* ossia di fornire ragioni a favore o contro una determinata affermazione, rappresentino un volano potente per costruire competenze più stabili, sia matematiche che linguistiche.
   - Tradurre dal linguaggio naturale al matematico e viceversa: questa competenza, per potersi sviluppare, necessita di una conoscenza via via più estesa dei due linguaggi e delle relazioni che intercorrono fra la loro *semantica* e la loro *sintassi*. Gli alunni devono imparare ad affrontare la struttura complessiva del testo originale, concentrandosi sugli enti e sulle relazioni che li collegano, in qualunque linguaggio esso venga espresso.
   - Risolvere/Rappresentare: *risolvere* un problema significa puntare al *prodotto*, cioè all'individuazione delle operazioni che portano al risultato. *Rappresentare* un problema significa puntare al *processo*, cioè all'individuazione delle scritture che consentono di esplicitare in linguaggio matematico le relazioni fra gli

elementi del problema, cioè la sua struttura. Nel primo caso si privilegia il punto di vista *procedurale*, nel secondo quello *relazionale*.

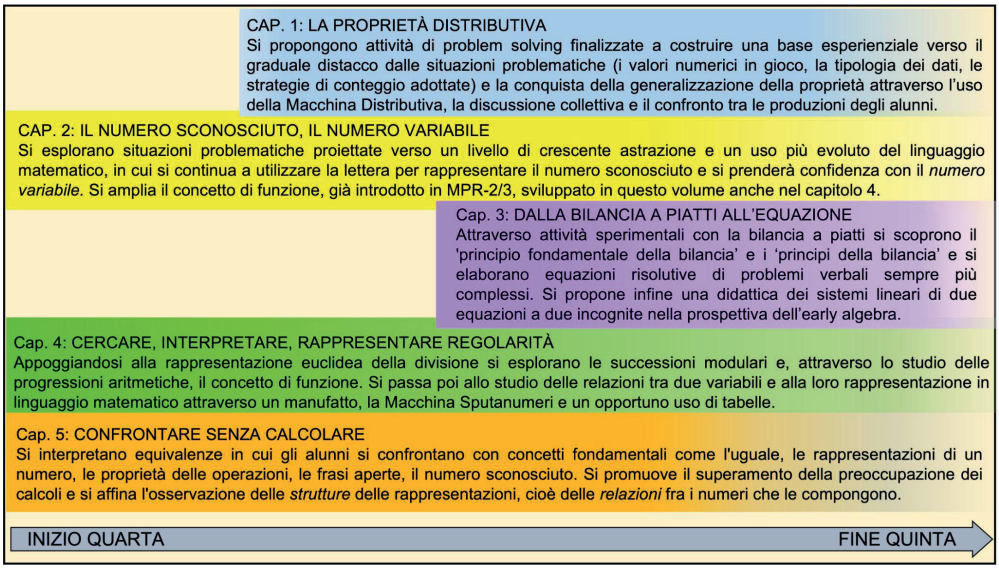
I.3. I capitoli

Il percorso, di cui diamo una sequenza cronologica indicativa, si sviluppa attraverso cinque capitoli che sono in parte prosecuzione di ambienti avviati in prima e in parte nuovi, e sono tutti destinati a svilupparsi anche negli anni successivi.

L'insegnante compatibilmente con la sua personale esperienza:

- se ha già avviato l'attività dalla prima utilizzando MPR-1 e MPR-2/3 può proseguire con le attività proposte in MPR-4/5;
- se intraprende il percorso dalla seconda può scegliere alcune proposte di MPR-2/3 per affrontare i temi chiave e poi proseguire con MPR-4/5.
- se lo ritiene opportuno, può trarre spunto dalle situazioni problematiche illustrate nei capitoli per costruirne di simili.

Alla fine di ogni capitolo compare un'appendice denominata '*Espansione. Verso la scuola secondaria*', composta da situazioni problematiche adatte sia a classi quinte 'evolute' sul piano delle competenze nell'ambiente dell'early algebra che a classi di scuola secondaria di primo grado che abbiano fatto esperienza con il tema sviluppato in quel capitolo e possiedano le competenze relative.



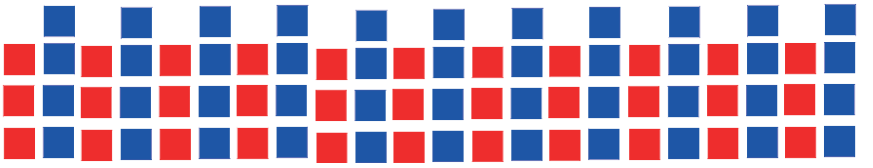
La sequenza cronologica delle attività

1. LA CONQUISTA DELLA PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA

[Collegamenti con: G. Navarra, A. Giacomin (2008). *U11: Viaggio alla scoperta della proprietà distributiva.* Sintab Edizioni]

Dedichiamo a questa proprietà il primo capitolo per l'importanza che essa riveste in aritmetica (nel calcolo mentale, nelle attività sugli algoritmi, ...) e in algebra (trasformazione di espressioni, riconoscimento di equivalenze, ...). Il lettore la ritroverà 'distribuita' nella soluzione di situazioni problematiche all'interno tutti i capitoli perché permette di semplificare i calcoli trasformando operazioni complesse in una serie di operazioni più semplici.

Per avvicinare gli alunni al significato generale della proprietà, indipendente cioè dai valori numerici in gioco, dalla tipologia dei dati e dalla strategia di conteggio adottata, si inizierà proponendo l'esplorazione di un'ampia varietà di situazioni problematiche opportunamente costruite. Per esempio, se si chiede a un gruppo di persone di contare il numero totale dei quadrati di questa figura:



e di rappresentare in linguaggio matematico come hanno contato, emergono due strategie di conteggio:

(1) alcuni contano separatamente quante volte si ripetono i tre quadrati rossi, quante volte si ripetono i quattro quadrati blu e poi sommano i due calcoli:

$$11\times3+11\times4$$

(2) altri individuano un gruppo di quadrati che si ripete (tre rossi e quattro blu) e contano quante volte questo accade:

$$11\times(3+4)$$

Il confronto tra le due strategie porta a capire che sono entrambe corrette e si rappresenta la loro equivalenza:

$$11\times3+11\times4=11\times(3+4)$$

Questa è la base esperienziale sulla quale si inizia un percorso avente l'obiettivo di costruire una *semantica della proprietà*.

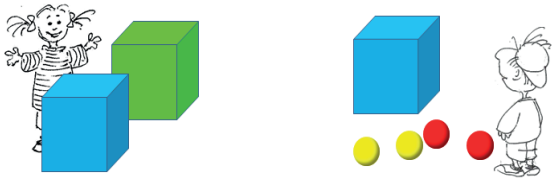
Si propone quindi la *Macchina Distributiva,* un manufatto originale costituito da una parte fissa da appoggiare al piano di lavoro e da parti mobili incernierate su sei perni (v. § I.13 I MATERIALI). Attraverso la rotazione delle parti mobili e la manipolazione di componenti che si possono aggiungere, togliere, sostituire, si favorisce *la visualizzazione della struttura della proprietà e delle tante rappresentazioni che si possono ottenere*, equivalenti a quella di partenza, attraverso l'applicazione della proprietà commutativa e di quella simmetrica dell'uguaglianza.

2. IL NUMERO SCONOSCIUTO, IL NUMERO VARIABILE

[Collegamenti con: MPR-1: II.5 *Verso le equazioni per gioco*, II.6 Esplorare le *equazioni per gioco*, II.7 Problemi ed *equazioni per gioco*; MPR.2/3: II.3 *Il numero sconosciuto*, II.4 *Numeri che non è possibile determinare*]

Confrontandosi con un'ampia serie di situazioni problematiche gli alunni amplieranno e approfondiranno l'incognita e il 'numero che non si può determinare'. Quest'ultimo verrà esplorato in due diversi significati, come:

(a) numero *generico* (gli alunni possono scegliere arbitrariamente numeri qualsiasi). Per esempio nella situazione sottostante, per le regole ormai familiari (la Regola dell'uguaglianza e la Regola dei colori, v. MPR-1, p.17), nella scatola verde ci sono quattro biglie, nelle scatole blu c'è lo stesso numero, che può essere un numero qualsiasi tranne il 4:



(b) numero *variabile* (l'attenzione è sull'insieme cui appartiene un certo numero, che definisce i valori che esso può assumere); ad esempio, questa frase:

'Faremo la festa se si iscrivono più di 30 ragazzi.
In ogni caso devono essere meno di 40'

viene interpretata nel senso che potranno partecipare fra i 31 e i 39 ragazzi. Detto in altre parole (r = numero dei ragazzi che possono partecipare alla festa):

$30<r<40$

Si affronterà anche il concetto di numero variabile in relazione a situazioni in cui due quantità vengono osservate *assieme* nella loro variazione e si può esprimere ogni valore di una di esse mediante il corrispondente valore dell'altra. Per esempio in questo regolamento:

'In questa gara il percorso degli adulti dev'essere lungo
il triplo di quello dei ragazzi'

Se la lunghezza del percorso dei ragazzi è di un chilometro quello degli adulti è di 3, se è di 2 chilometri quello degli adulti è di 6, se è di 4 chilometri quello degli adulti è di 12 e così via. Si amplia il concetto di *funzione*, già introdotto in MPR-2/3, sviluppato in questo volume anche nel capitolo 4 *Cercare, interpretare, rappresentare regolarità* e si consolida l'uso della *lettera*.

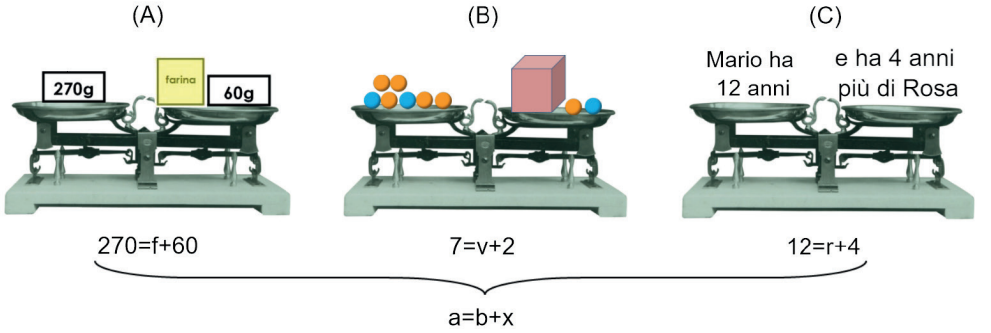
3. DALLA BILANCIA A PIATTI ALL'EQUAZIONE

[Collegamenti con: MPR-1: II.5 *Verso le equazioni per gioco*, II.6 *Esplorare le equazioni per gioco*, II.7 *Problemi ed equazioni per gioco*; MPR-2/3, II.6: *Risolvere vs rappresentare*]

Il capitolo amplia e approfondisce aspetti centrali nella costruzione del pensiero pre-algebrico: il significato relazionale del segno uguale, le rappresentazioni canonica e non canonica di un numero, il numero sconosciuto e le sue rappresentazioni, la dualità risolvere/rappresentare.

La bilancia a piatti, come vedremo, costituisce un supporto efficace per il passaggio dalle *equazioni per gioco* alle *equazioni*. Mostreremo come, nella soluzione di problemi verbali, un particolare utilizzo della bilancia favorisca la scoperta sperimentale dei 'principi della bilancia' (che al momento opportuno diverranno i *principi di equivalenza*) e la rappresentazione della situazione in linguaggio matematico. Vedremo quindi come si possa passare, anche con alunni giovani, dalle esperienze con una *bilancia vera* (A) al riconoscimento di una bilancia *nascosta* in un problema basato su un'*immagine* (B) o nel *testo* di un problema verbale (C).

Vedremo infine come un'equazione rappresenti un'infinità di problemi *strutturalmente analoghi*. Ad esempio:



Il percorso: (i) inizia sperimentalmente con una bilancia artigianale e la conquista del 'principio fondamentale della bilancia'; (ii) prosegue con la classica bilancia a piatti e la scoperta dei due 'principi della bilancia' sino alla rappresentazione simbolica delle esperienze compiute. Si propongono poi: (iii) problemi verbali che descrivono situazioni aventi per oggetto la bilancia e i pesi; (iv) problemi con un supporto iconico avente lo scopo di favorire la percezione degli elementi del testo *in equilibrio* fra loro (i 'piatti'); (v) problemi verbali algebrici privi di supporto iconico. Nell'Espansione si propongono situazioni problematiche in cui compaiono due variabili collegate fra loro da relazioni differenti. Si introduce quindi il concetto di *sistema* e si presentano i punti nodali per una *didattica dei sistemi nella prospettiva dell'early algebra*.

4. CERCARE, INTERPRETARE, RAPPRESENTARE REGOLARITÀ

[Collegamenti con: MPR-1, II.1: *Ricercare regolarità*; MPR-2/3, II.7: *Ricercare e interpretare regolarità*]

Si approfondisce lo sviluppo di un tema avviato in MPR-1 che affonda le sue radici nel concetto di *successione modulare* e, attraverso lo studio delle *progressioni aritmetiche*, si proietta verso il concetto di *funzione*. Il capitolo è suddiviso in sei fasi.

La divisione nell'insieme dei Naturali nella sua *rappresentazione euclidea* (v. MPR-2/3, p.40) è uno degli argomenti che trovano maggiore spazio nelle attività di questo capitolo quando si deve individuare il legame tra un elemento e il numero di posto che esso occupa. Per esempio, in una successione generata da questo modulo:



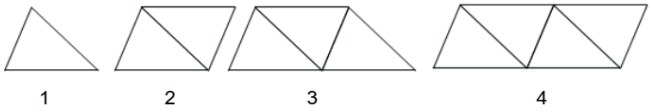
l'alunno deve spiegare in linguaggio naturale e in linguaggio matematico come si individua l'elemento che si trova nella 97ª posizione.

Nella quinta fase si passa allo studio delle relazioni tra due variabili e alla loro rappresentazione in linguaggio matematico. Si propongono tre ambienti:

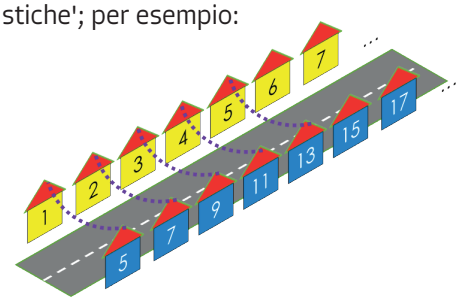
1) la Macchina SputaNumeri (v. § I.13 I MATERIALI); per esempio:



2) successioni figurali costituite da figure geometriche generate in sequenza da un modello geometrico iniziale; per esempio:



3) situazioni 'realistiche'; per esempio:



Attraverso l'esplorazione di questi ambienti gli alunni imparano ad appoggiarsi all'uso di tabelle per analizzare le relazioni fra le coppie di variabili, individuare le relazioni che le collegano, organizzare la loro rappresentazione in linguaggio matematico, ricavare leggi generali. Si avvicinano così, in modo sperimentale. al concetto di *funzione*.

5. CONFRONTARE SENZA CALCOLARE

[Collegamenti con: MPR-1, II.4: *Confrontare senza calcolare*]

Ripetiamo in continuazione come il pensiero algebrico sia intimamente intrecciato con l'apprendimento dell'aritmetica. In questo capitolo emerge chiaramente come il tipo di coinvolgimento richiesto agli alunni sia importante per due ragioni: (a) favorisce l'apprendimento dell'aritmetica; (b) può creare dei fondamenti che ammorbidiscono il passaggio all'algebra. Quando gli alunni tradizionalmente imparano l'aritmetica vengono educati sia all'esterno della scuola che al suo interno ad aggiungere, sottrarre, moltiplicare e dividere, cioè a *svolgere delle procedure*. Come sappiamo, è questo atteggiamento che li porta a vedere l'uguale come *operatore direzionale* e come *indicatore di conclusione*: a sinistra dell'uguale ci sono delle *operazioni* ed è ovvio che a destra quello che sta scritto sia il risultato di quei calcoli.

Questa convinzione rappresenta un ostacolo epistemologico verso l'algebra.

In algebra gli studenti hanno a che fare con espressioni che comportano sì l'aggiungere, il sottrarre, il moltiplicare, il dividere, ma che non per questo comportano l'idea di svolgere dei calcoli. Ad esempio, in 5×4+7×2-11×3 possono svolgere le moltiplicazioni e ottenere 20+14-33, poi eseguono nell'ordine l'addizione e la sottrazione e trovano il risultato 1. Ma in un'espressione come 5×a+7×y-11×c non possono *eseguire le moltiplicazioni,* né *sommare* 5a e 7y e poi *sottrarre* 11c né, in definitiva, trovare un *risultato*. Gli alunni devono imparare invece *a riflettere sulle relazioni fra espressioni;* per esempio di fronte a questa scrittura:

$$87-59\stackrel{?}{=}a-56$$

che significa 'Questa uguaglianza è vera?' un alunno potrebbe argomentare in questo modo:

"Confrontando le due differenze vedo che 56 ha tre unità in meno di 59.
Perché l'equivalenza sia vera è necessario che anche 'a',
per la proprietà invariantiva della sottrazione,
abbia tre unità in meno di 87, debba cioè essere uguale a 84"

L'alunno conclude che:

$$87-59=84-56$$

Il controllo della verità di equivalenze tra rappresentazioni differenti contenenti sia numeri che numeri 'da scoprire' costituisce un contesto molto ricco per la maturazione del *pensiero relazionale*.

9. Luca ha ricevuto per Halloween una cintura come questa da indossare sopra il costume da fantasmino quando va a fare 'Dolcetto o scherzetto?':



Rappresenta per Brioshi il numero totale delle zucche e dei pipistrelli.

Gli alunni, come si è illustrato nell'introduzione al capitolo, percepiscono molto probabilmente in due modi diversi la cintura, e su questa base impostano i loro calcoli:

- *se contano separatamente le tre zucche e i due pipistrelli probabilmente esprimono il numero delle zucche come prodotto di 4 con 3, il numero dei pipistrelli come prodotto fra 4 e 2 e li sommano. Scrivono delle frasi riconducibili alla 'classica':*

$$(A) \quad 4\times3+4\times2$$

- *se si concentrano sul modulo[12] formato da tre zucche e due pipistrelli che si ripete quattro volte e rappresentano il numero totale degli oggetti come prodotto fra il numero delle volte che il modulo si ripete e la somma fra il numero delle zucche e quello dei pipistrelli, scrivono delle frasi riconducibili a:*

$$4\times(3+2)$$

Concludono che i due percorsi, e quindi le due scritture, si equivalgono e scrivono:

$$4\times3+4\times2=4\times(3+2)$$

10. Rappresenta in linguaggio matematico questa situazione:



L'insegnante invita gli alunni a descrivere ciò che vedono anche recuperando da esperienze precedenti il concetto di 'modulo'; per esempio:
"Nel disegno sono rappresentati 7 moduli di 5 elementi ciascuno e ogni modulo è formato da 2 pallini neri e da 3 pallini gialli".
La descrizione apre la strada a diverse rappresentazioni matematiche, parziali o globali:

- *5, 2+3, 5=2+3 sono rappresentazioni parziali della situazione, che si limitano a descrivere, in forma canonica e non canonica, la struttura di un modulo;*

12 › Riportiamo la definizione di 'modulo' che compare nel Glossario di MPR-1: 'Un timbro grafico, un ritmo musicale, un periodo verbale che, ripetendosi progressivamente, determina la generazione di una successione; è formato da un numero finito di elementi'. L'argomento diverrà centrale nel Cap.4 di questo volume.

- *7×5, 7×5=35, 5×7, 5×7=35 sono rappresentazioni corrette in cui però la composizione del modulo (in forma non canonica 2+3) è opacizzata dalla forma canonica '5';*
- *7×(2+3) è corretta e trasparente;*
- *7×2+7×3 è altrettanto corretta e ugualmente trasparente; pone l'accento non tanto sulla struttura del modulo (2+3), quanto sul numero complessivo di pallini neri e gialli.*

Si giunge al riconoscimento, ancora una volta, che le rappresentazioni 7×(2+3) e 7×2+7×3 esprimono punti di vista e strategie di calcolo che, pur formalmente differenti, sono relative alla stessa quantità e quindi sono equivalenti:

$$7\times(2+3)=7\times2+7\times3$$

11. Una collanina è formata da nove gruppi di perline, ognuno dei quali è costituito da due perline a forma di cuore e da quattro a forma di trifoglio.
Rappresenta in linguaggio matematico il numero totale delle perline che formano la collana. Se vuoi, aiutati con un disegno.

Gli alunni comprendono che la collana è composta dalla ripetizione di 9 moduli uguali a questo:

❤️❤️☘️☘️☘️☘️☘️

possono quindi pensare al numero delle perle come prodotto di 9 con la somma di 2 e 4:

$$9\times(2+4)$$

oppure, concentrando l'attenzione sui diversi elementi che compongono il modulo, possono scegliere una rappresentazione che evidenzi il numero totale dei cuoricini e dei trifogli, quindi:

$$9\times2+9\times4$$

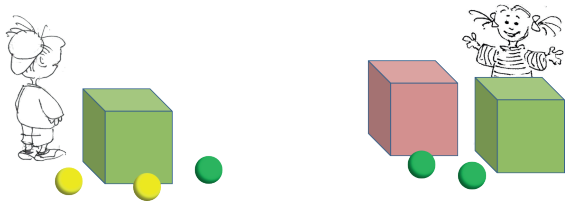
Concludono che entrambe le rappresentazioni sono forme non canoniche di 54, infatti:

$$9\times(2+4)=9\times6=54 \text{ e } 9\times2+9\times4=18+36=54$$

Ciò rende possibile l'uguaglianza:

$$9\times(2+4)=9\times2+9\times4$$

6. ALLA RICERCA DEI NUMERI NASCOSTI



Quante biglie contengono le scatole di Marta e Bibo?
Argomentate le vostre conclusioni.

"Applicando z-z si possono togliere una scatola verde e due biglie per parte. Bibo rimane con una biglia e Marta con la scatola rosa. In conclusione la scatola rosa contiene una biglia e le scatole verdi contengono lo stesso numero di biglie che può essere qualsiasi numero tranne l'1".
Se l'insegnante lo ritiene opportuno può ricorrere alla 'strategia dei quadrati e dei gettoni': gli alunni ricostruiscono la situazione e applicano concretamente z-z:



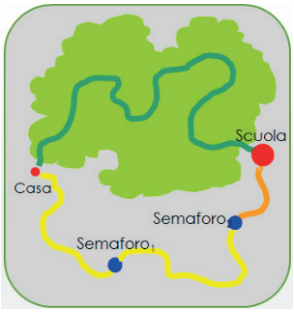
(1) (2)

7. DUE SALVADANAI E UN UNICO GRUZZOLO

Nicola e Anna hanno un salvadanaio ciascuno.
Sanno che essi contengono la stessa quantità di denaro, ma non sanno quanto.
Anna, inoltre, ha in mano 8 euro.
A. Come rappresentereste i soldi che ha Nicola?
B. Come rappresentereste il numero totale di euro di Anna?
C. Nicola e Anna mettono assieme i loro soldi. Come rappresentereste l'importo totale?
Argomentate le risposte.

A. n
B. n+8
C. n+n+8 oppure 2×n+8.

16. L'insegnante propone il seguente problema:
Elena e Fabio vanno a scuola per due strade diverse aventi la stessa lunghezza di 450 m.
Elena va a piedi attraverso il parco. Fabio invece, in bicicletta, oltrepassa due semafori e poi ha ancora 100 m da percorrere. I due primi tratti della strada di Fabio sono uguali.
Rappresentate la situazione in modo che Brioshi possa trovare la misura di ciascuno di essi.



Se qualcuno proponesse una soluzione procedurale:

450-100=350 → 350:2=175

l'insegnante potrebbe riprendere la discussione sulla differenza fra rappresentare e risolvere.
Gli alunni devono riconoscere la 'bilancia' i cui piatti sono costituiti dai due percorsi:



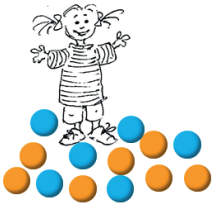
<u>Gli enti</u>
450 = lunghezza in metri dei percorsi di Elena e Fabio da casa a scuola
2 = numero dei tratti uguali percorsi da Fabio
s = lunghezza in metri di ciascuno dei due tratti di strada uguali: dalla casa di Fabio al semaforo 1 e dal semaforo 1 al semaforo 2
100 = lunghezza in metri della strada dal semaforo 2 alla scuola

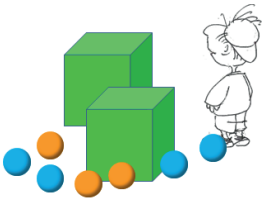
La rappresentazione
450=s+s+100
Una soluzione dell'equazione

450=s+s+100	*si applica il primo principio togliendo 100 da entrambi i membri*
450-100=s+s+~~100-100~~	*si sostituisce 450-100 con la sua forma canonica*

350=s+s
Il prossimo passaggio prevede l'applicazione del secondo principio; gli alunni devono capire che, per rappresentarlo, devono inserire delle parentesi.
350:2=(s+s):2
L'esperienza mostra come non sia semplice vedere l'esito della divisione a destra come s. È di grande aiuto nella comprensione guidare la classe verso la rappresentazione moltiplicativa 2×s:
350:2=2×s:2
175=s
Ognuno dei due tratti di strada uguali è lungo 175 metri.

Situazione strutturalmente analoga con S&B:
Trovate il numero delle biglie in ognuna delle scatole verdi.



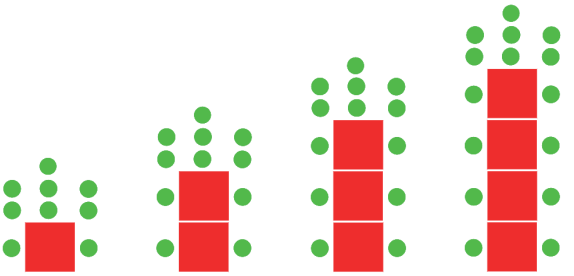


Gli enti
v = numero di biglie in ognuna delle scatole verdi
13 = numero delle biglie di Marta
7 = numero delle biglie visibili di Bibo
La rappresentazione
13=2×v+7
Una soluzione dell'equazione

13=2×v+7	*si sostituisce 13 con una opportuna forma non canonica*
7+6=2×v+7	*si applica il primo principio*
~~7~~+6=2×v+~~7~~	*si copia quello che rimane*
6=2×v	*si applica il secondo principio*

6:2=2×v:2
3=v
Ogni scatola verde contiene tre biglie.

25. Gli alunni di una classe stanno costruendo queste figure, che decidono di chiamare 'alberi'.
A. Se volessero costruire un albero con 19 quadrati quanti pallini servirebbero?
B. Come esprimerebbero la legge generale che pone in relazione il numero dei pallini con quello dei quadrati?
C. Se volessero costruire un albero con 65 pallini quanti quadrati servirebbero?
D. Trovate la legge che mette in relazione il numero dei quadrati di un albero con quello dei suoi pallini.
E. Riccardo vorrebbe che il suo albero avesse 50 pallini. Emma gli dice che non esiste un albero fatto in questo modo. Emma ha ragione?



A. Per poter rispondere ai vari quesiti gli alunni dovrebbero capire che in questo caso:

- *le due variabili sono il numero dei quadrati e quello dei pallini di una stessa figura;*
- *il numero di posto, come nel caso precedente, è uguale al numero dei quadrati di ogni figura.*

Interpretano ogni albero come formata da un numero variabile di quadrati posti uno sopra l'altro, ai lati di ognuno dei quali ci sono due pallini, e da un gruppo di sette pallini in cima all'albero.
Passano alla costruzione della tabella in cui colorano i numeri delle posizioni (celeste) e le parti costanti (rosa) (p = numero dei pallini, q = numero dei quadrati):

q	p		
1	9	2+7	2×1+7
2	11	4+7	2×2+7
3	13	6+7	2×3+7
4	15	8+7	2×4+7
...	...		...
19			2×19+7
...	...		...
q			2×q+7

Trovano quindi il numero totale dei pallini di ogni figura raddoppiando il suo numero di posto e aggiungendo 7: per costruire l'albero con 19 quadrati sono necessari 2×19+7 cioè 45 pallini.
B. Completano quindi la legge:

$$p=2\times q+7$$

e la esprimono in linguaggio naturale:

"Il numero dei pallini di un albero è uguale alla
somma fra il doppio del numero dei quadrati e sette".

Qualche alunno potrebbe intuire questa conclusione senza ricorrere alla tabella, esprimendo probabilmente un punto di vista procedurale, ad esempio:

"Per trovare il numero dei pallini
si moltiplica per due il numero dei quadrati e poi si aggiunge sette".

Anche per lui sarà una conquista il percorso in una prospettiva relazionale supportato dalla rappresentazione tabulare.
C. Per trovare il numero dei quadrati che servono per costruire un albero con 65 pallini si possono seguire più strategie:
C1. aritmetica: "Tolgo da 65 i 7 pallini in cima e trovo 58 che divido per due e trovo 29".
C2. algebrica: si interviene sull'equivalenza p=2×q+7, si sostituisce p con 65 e si ottiene:

$$65=2\times q+7$$

Poi si risolve come equazione:

$65=2\times q+7$ si sostituisce 65 con la sua forma non canonica $58+7$
$58+7=2\times q+7$ si applica il primo principio
$58+\cancel{7}=2\times q+\cancel{7}$ si ricopia quello che rimane
$58=2\times q$
$58:2=2\times q:2$ si applica il secondo principio
$29=q$

C3. con l'uso della tabella: gli alunni devono capire che si invertono le variabili, cioè che bisogna trovare il numero dei quadrati in funzione del numero dei pallini. Appoggiandosi alla prima tabella ne organizzano una seconda:

p	q	
9	1	(9-7):2
11	2	(11-7):2
13	3	(13-7):2
15	4	(15-7):2
...	...	...
65		(65-7):2
...	...	...
p		(p-7):2

D. Rappresentano la legge completa:

$$q=(p-7):2$$

La esprimono in linguaggio naturale:

"Il numero dei quadrati che formano un albero è uguale alla metà della differenza fra il numero dei suoi pallini e sette".

E. Emma ha ragione: non è possibile costruire un albero con 50 pallini perché il numero dei pallini di un qualsiasi albero è dispari in quanto è la somma fra il doppio del numero dei quadrati (che è pari) e sette (che è dispari).

4. Modificate questa scrittura in modo che vi compaia il numero 7.

$$28+49$$

Spiegate come avete fatto.

Esempi di argomentazione (le parentesi dell'esempio (e) non sono necessarie ma favoriscono la lettura):
"Ho sostituito:
(a) la forma canonica 28 con la forma non canonica moltiplicativa 7×4 → 7×4+49";
(b) la forma canonica 28 con la forma non canonica additiva 21+7 → 21+7+49";
(c) la forma canonica 49 con la forma non canonica moltiplicativa 7×7 → 28+7×7";
(d) la forma canonica 49 con la forma non canonica additiva 42+7 → 28+42+7".
(e) entrambi i numeri con forme non canoniche contenenti il numero 7, ad es.: 7×4+7×7; (21+7)+(42+7); 4×7+(7+42): ..."

5. Modificate la scrittura

$$9×2×2×3$$

in modo da ottenere delle scritture equivalenti che contengano:
A. il numero 4;
B. il 18;
C. il 27;
D. il 6;
E. il 12.
Spiegate ogni volta come avete fatto.

Esempi di argomentazione:
"Ho applicato la proprietà associativa e ho sostituito:
A la forma non canonica 2×2 con la forma canonica 4 → 9×4×3;
B la forma non canonica 9×2 con la forma canonica 18 → 18×2×3;
C la forma non canonica 9×3 con la forma canonica 27 → 27×2×2;
D la forma non canonica 2×3 con la forma canonica 6 → 9×2×6;
E la forma non canonica 2×2×3 con la forma canonica 12 → 9×12".
L'insegnante può chiedere di esprimere le relazioni fra tutte le scritture ottenute, compresa quella originale; si giungerebbe a una catena di equivalenze:

$$9×2×2×3=9×4×3=18×2×3=27×2×2=9×2×6=9×12$$

13. Argomentate la correttezza di questa equivalenza:

$$96-2\times6=96-15$$

Premesse:

- *$96-2\times6=96-15$ sono entrambe differenze*
- *$96-2\times6=96-15$ in entrambe il minuendo è 96*
- *$96-2\times6=96-15$ si confrontano i sottraendi: 2×6 è la forma non canonica di 12*
- *$12<15$*

Conclusione: $96-2\times6>96-15$ (qualche alunno potrebbe mostrarsi perplesso dalla conclusione: siccome $12<15$, allora $96-2\times6>96-15$; si rifletterà sul fatto che, a parità di minuendo, la differenza è tanto maggiore quanto minore è il sottraendo).
L'insegnante può anche richiedere la verbalizzazione di questa equivalenza:
"La differenza fra 96 e il doppio di 6 è maggiore della differenza fra 96 e 15".

14. Argomentate la correttezza di questa equivalenza:

$$15\times24\stackrel{?}{=}45\times8$$

Una possibile argomentazione:
"24 (a sinistra) è il triplo di 8 (a destra) e 45 (a destra) è il triplo di 15 (a sinistra). Rappresento 24 come 3×8 (8×3) e 45 come 15×3 (3×15):

$$15\times3\times8=3\times15\times8$$

L'equivalenza è vera".
Con un ulteriore passaggio, applicando la proprietà commutativa, si potranno ottenere due rappresentazioni uguali.

15. Argomentate la correttezza di questa equivalenza:

$$300\times40\stackrel{?}{=}4\times3000$$

Un'argomentazione:
"Sostituisco a destra 3000 con 300×10 e a sinistra 40 con 4×10:

$$300\times4\times10=4\times10\times300$$

Ai due lati dell'uguale ci sono due rappresentazioni uguali e quindi l'equivalenza è vera".
L'insegnante potrebbe dire all'autore che le due rappresentazioni non sono proprio 'uguali' in modo che emerga la proprietà commutativa (non si accontenti di un semplice "I numeri cambiano di posto").

43. Gigia e i fratelli Lillo e Pancio stanno confrontando le loro collezioni di biglie. Gigia nota che:

- tutte le loro scatole sono dello stesso colore verde;
- le collezioni di Lillo e di Pancio sono uguali fra loro.

Gigia rappresenta in linguaggio matematico la sua collezione:

$$2\times v+10$$

Lillo e Pancio mettono assieme le loro collezioni uguali e organizzano questa rappresentazione:

$$2\times(v+5)$$

Siccome Gigia pensa che la sua collezione sia uguale a quelle di Lillo e Pancio scrive:

$$2\times v+10\stackrel{?}{=}2\times(v+5)$$

A. Controllate se l'ipotesi di Gigia è vera.
B. Ricostruite, dalle due rappresentazioni, il disegno che rappresenta le collezioni di Gigia, Lillo e Pancio.

A. Per verificare l'equivalenza, gli alunni devono capire, in primo luogo, che:
v = numero di biglie in ogni scatola.
Devono poi saper modificare la scrittura a destra 2×(v+5) in funzione del prodotto a sinistra 2×v; per fare questo applicano la proprietà distributiva:

$$2\times v+10\stackrel{?}{=}2\times v+2\times 5$$

Tolgono i due prodotti uguali; rimangono due rappresentazioni di 10:

$$10=2\times 5$$

L'ipotesi di Gigia è corretta.
B. Rappresentano la situazione mediante degli oggetti concreti oppure utilizzando cartoncini e gettoni già utilizzati nelle attività con Scatole & Biglie (v. MPR-2/3, p.132):

